# 第十一周　补充作业

1. 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $E$ 上可测函数，且有

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}, \quad 1\le p<\infty,$$

试证明 $\|fg\|_r \le \|f\|_p\|g\|_q$。

2. 设 $2\le p<\infty$, $f_i\in L^p(E)$, $(i=1,2,\ldots,k)$. 证明：

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^{k}|f_i|^2\right)^{1/2}\right\|_p \le \left(\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|_p^2\right)^{1/2}.$$

3. 设 $1\le p\le\infty$, $1/p+1/p'=1$, $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g\in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, 且令

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t, \quad x\in\mathbb{R}^d,$$

试证明 $F\in C(\mathbb{R}^d)$.

4. 设 $1\le q<p<\infty$, $m(E)<\infty$. 若有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x=0,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|^q\,\mathrm{d}x=0.$$